

LẬP TRÌNH PYTHON VÀ PHƯƠNG PHÁP B-SPLINE COLLOCATION GIẢI PHƯƠNG TRÌNH GRLW

TS. Nguyễn Văn Tuấn

Phó Trưởng Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Đại Nam

Ngày nhận bài: 11/3/2022, ngày gửi phản biện: 25/3/2022, ngày duyệt đăng: 15/4/2022.

Tóm tắt. Trong bài báo này nghiệm của phương trình GRLW (sóng dài chính quy tổng quát) sẽ tìm được bằng phương pháp B-Spline collocation với hệ cơ sở bậc 3. Hệ phương trình sai phân hữu hạn tương ứng với phương trình GRLW sẽ được chứng minh ổn định vô điều kiện và giải bằng chương trình Python. Phương pháp đưa ra hiệu quả hơn một số các kết quả nghiên cứu gần đây.

Từ khóa. Phương trình GRLW, phương pháp B-Spline collocation, phương pháp sai phân hữu hạn.

1. Giới thiệu

Trong bài báo này chúng ta nghiên cứu phương trình sóng dài chính quy tổng quát:

$$u_t + u_x + p(p+1)u^p u_x - \mu u_{xxt} = 0 \quad (1)$$

với điều kiện $u \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \infty$, p là số tự nhiên dương, μ là hằng số dương, t là biến thời gian, x là biến không gian. Cụ thể ta chọn điều kiện đầu và điều kiện biên:

$$\begin{cases} u(a,t) = 0 & u(b,t) = 0 \\ u_x(a,t) = 0 & u_x(b,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in [a,b], \end{cases}$$

$f(x)$ là hàm đã cho (2)

Bài toán (1), (2) sẽ được lập trình giải bằng ngôn ngữ Python. Phương trình (1) có rất nhiều ứng dụng trong thực tế. Cụ thể, nó mô tả về sự hình thành và truyền sóng trong động lực học chất lỏng, sự nhiễu loạn, âm học, động lực học plasma, ...

Do vậy, trong những năm gần đây nhiều nhà toán - tin đã quan tâm nghiên cứu. Cụ thể,

L.R.T Gardner và các tác giả khác [4] đã giải xấp xỉ phương trình (1) với $p=2$ bằng phương pháp phân tử hữu hạn B-Spline. Phương trình (1) với $p=2$ gọi là phương trình MRLW. Trong công trình [5], A.K. Khalifa cùng các tác giả khác đã sử dụng phương pháp collocation với cơ sở B-Spline bậc 3 giải phương trình MRLW. Năm 2010 K.R. Raslan và T.S. EL-Danaf đã sử dụng cơ sở B-Spline bậc 5 tìm nghiệm sóng đơn (Solitary wave) của phương trình MRLW [7]. Công trình nghiên cứu [2] năm 2016, S.B.G. Karakoc và H. Zeybek đã sử dụng phương pháp Spline collocation với cơ sở B-Spline bậc 5 giải phương trình (1). Mới đây năm 2021, S.B.G Karakoc và các tác giả khác đã tìm nghiệm chính xác của (1) và sử dụng cơ sở B-Spline bậc 6 giải phương trình (1) [3].

Trong bài báo này, chúng ta áp dụng phương pháp Collocation với cơ sở B-Spline bậc 3, tìm nghiệm xấp xỉ bậc 4 của (1). Do vậy có kết quả đạt được tốt hơn kết quả nghiên cứu [3], [8].

Bài báo gồm các mục sau: Mục 1, giới thiệu nghiên cứu. Mục 2, trình bày phương pháp Collocation với cơ sở B-Spline bậc 3 giải (1). Mục 3, chứng minh sự ổn định của hệ phương trình sai phân hữu hạn tìm được. Mục 4, minh họa bằng số các ví dụ được chạy bằng chương trình Python khẳng định hiệu quả phương pháp giải. Mục 5, trình bày

kết luận.

2. Phương pháp collocation với cơ sở B-Spline bậc 3

Chia đoạn $[a, b]$ làm N phần bằng nhau bởi các điểm chia x_m với

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b, h = \frac{b-a}{N}, 0 \leq m \leq N.$$

Cơ sở B-Spline bậc 3 được xác định theo [6]:

$$B_i(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & , x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & , x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & , x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & , x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & , x \notin [x_{i-2}, x_{i+2}]. \end{cases} \quad (3)$$

Nghiệm xấp xỉ của phương trình (1) tìm được duy nhất dưới dạng: [6]

$$U_N(x, t) = \sum_{m=1}^{N+1} \delta_m(t) B_m(x). \quad (4)$$

Từ (4) tìm giá trị của $U_N(x, t)$ và các đạo hàm riêng bậc 1, bậc 2 theo x tại (x_m, t) , $m = 0, \dots, N$ và sử dụng giá trị của $B_i(x_m), B_i'(x_m), B_i''(x_m), i = -1, 0, \dots, N, N+1$ ta nhận được:

$$\begin{cases} U_N(x_m, t) = \delta_{m-1}(t) + 4\delta_m(t) + \delta_{m+1}(t) \\ U_N'(x_m, t) = \frac{3}{h}(-\delta_{m-1}(t) + \delta_{m+1}(t)) \\ U_N''(x_m, t) = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1}(t) - 2\delta_m(t) + \delta_{m+1}(t)), \quad m = 0, \dots, N. \end{cases} \quad (5)$$

Giả sử $U_N(x, t)$ là nghiệm của (1) theo kết quả [1] ta có:

$$\begin{cases} U_N'(x_m, t) = u'(x_m, t) + O(h^4) \\ U_N''(x_m, t) = u''(x_m, t) - \frac{1}{12}h^2 u^{(4)}(x_m, t) - O(h^4), \quad j = 0, \dots, N. \end{cases}$$

Vì $U(x, t)$ là nghiệm xấp xỉ của $u(x, t)$ nên sử dụng công thức sai phân hữu hạn cho $u''(x_m, t)$ ta nhận được:

+ Với $m = 0$:

$$u''(x_0, t) = \frac{1}{12} [14U_N''(x_0, t) - 5U_N''(x_1, t) + 4U_N''(x_2, t) - U_N''(x_3, t)] + O(h)^4.$$

+ Với $1 \leq m \leq N-1$:

$$u''(x_m, t) = \frac{1}{12} [14U_N''(x_{m-1}, t) - 10U_N''(x_m, t) + U_N''(x_{m+1}, t)] + O(h)^4.$$

+ Với $m = N$:

$$u''(x_N, t) = \frac{1}{12} [14U_N''(x_N, t) - 5U_N''(x_{N-1}, t) + 4U_N''(x_{N-2}, t) - U_N''(x_{N-3}, t)] + O(h)^4.$$

Thay (5) vào các công thức tính $u''(x_m, t)$ ở trên ta có:

$$\begin{cases} u''(x_0, t) = \frac{1}{2h^2} [14\delta_{-1}(t) - 33\delta_0(t) + 28\delta_1(t) - 14\delta_2(t) + 6\delta_3(t) - \delta_4(t)] \\ u''(x_m, t) = \frac{1}{2h^2} [14\delta_{m-2}(t) - 8\delta_{m-1}(t) + 18\delta_m(t) - 8\delta_{m+1}(t) + \delta_{m+2}(t)], 1 \leq m \leq N-1, \\ u''(x_N, t) = \frac{1}{2h^2} [14\delta_{N+1}(t) - 33\delta_N(t) + 28\delta_{N-1}(t) - 14\delta_{N-2}(t) + 6\delta_{N-3}(t) - \delta_{N-4}(t)]. \end{cases} \quad (6)$$

Rời rạc hóa phương trình (1) bằng phương pháp sai phân hữu hạn, ta thu được:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \frac{u_x^{n+1} - u_x^n}{2} + p(p+1) \frac{(u^p u_x)^{n+1} + (u^p u_x)^n}{2} - \mu \frac{u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n}{2} = 0. \quad (7)$$

Áp dụng công thức: $(u^p u_x)^{n+1} \approx (u^p)^n u_x^{n+1} + p(u^{p-1})^n u_x^n u^{n+1} - p(u^p)^n u_x^n$ và $U_N(x, t) \approx u(x, t)$,

đồng thời sử dụng (5), (6), ta được hệ phương trình sai phân hữu hạn:

$$\begin{cases} a_1 \delta_{-1}^{n+1} + a_2 \delta_0^{n+1} + a_3 \delta_1^{n+1} + a_4 \delta_2^{n+1} + a_5 \delta_3^{n+1} + a_6 \delta_4^{n+1} & = b_1 \delta_{-1}^n + b_2 \delta_0^n + b_3 \delta_1^n + a_4 \delta_2^n + a_5 \delta_3^n + a_6 \delta_4^n \\ c_1 \delta_{m-2}^{n+1} + c_2 \delta_{m-1}^{n+1} + c_3 \delta_m^{n+1} + c_4 \delta_{m+1}^{n+1} + c_5 \delta_{m+2}^{n+1} & = -a_6 \delta_{m-2}^n + d_2 \delta_{m-1}^n + d_3 \delta_m^n + d_4 \delta_{m+1}^n - a_6 \delta_{m+2}^n, \\ -a_6 \delta_{N-4}^{n+1} + a_5 \delta_{N-3}^{n+1} + a_4 \delta_{N-2}^{n+1} + e_1 \delta_{N-1}^{n+1} + e_2 \delta_N^{n+1} + e_3 \delta_{N+1}^{n+1} & = -a_6 \delta_{N-4}^n + a_5 \delta_{N-3}^n + a_4 \delta_{N-2}^n + f_1 \delta_{N-1}^n + b_2 \delta_N^n + f_2 \delta_{N+1}^n \end{cases} \quad 1 \leq m \leq N-1 \quad (8)$$

với:

$$C_0 = \frac{3dt}{2h}; \quad C_1 = \frac{\mu}{2h^2}; \quad C_2 = \frac{3p(p+1)\Delta t}{2h}$$

$$C_4 = \frac{p^2(p+1)\Delta t}{2};$$

$$C_5 = \frac{3p(p-1)(p+1)\Delta t}{2h}$$

$$a_1 = 1 - C_0 - 14C_1 - C_2 L_{10}^p;$$

$$a_2 = 4 + \frac{33\mu}{2h^2} = 4 + 33C_1;$$

$$a_3 = 1 + C_0 - 28C_1 + C_2 L_{10}^p$$

$$a_4 = 14C_1; \quad a_5 = -6C_1; \quad a_6 = C_1$$

$$b_1 = 1 + C_0 - 14C_1 - C_5 L_{10}^p; \quad b_2 = a_2;$$

$$b_3 = 1 - C_0 - 28C_1 - C_5 L_{10}^p$$

$$c_1 = -C_1;$$

$$c_2 = 1 - C_0 - 8C_1 - C_2 L_{1m}^p;$$

$$c_3 = 4 + 18C_1 - 4C_4 L_{1m}^{p-1} L_{2m}$$

$$c_4 = 1 + C_0 - 8C_1 + C_2 L_{1m}^p$$

$$d_2 = 1 + C_0 - 8C_1 - C_5 L_{1m}^p; \quad d_3 = 4 + 18C_1;$$

$$d_4 = 1 - 8C_1 - C_0 + C_5 L_{1m}^p$$

$$e_1 = 1 - C_0 - 28C_1 - C_2 L_{1N}^p; \quad e_2 = a_2;$$

$$e_3 = 1 + C_0 - 14C_1 - C_5 L_{1N}^p$$

$$f_1 = 1 + C_0 - 28C_1 - C_5 L_{1N}^p;$$

$$f_2 = 1 - C_0 - 14C_1 - C_5 L_{1N}^p$$

$$L_{1m} = \delta_{m-1}^n + 4\delta_m^n + \delta_{m+1}^n; L_{2m} = +\frac{3}{h}(-\delta_{m-1}^n + \delta_{m+1}^n),$$

$$m = 0, \dots, N.$$

Hệ phương trình (8) gồm (N+1) phương trình với (N+3) ẩn: $\delta_{-1}^n, \delta_0^n, \delta_1^n, \dots, \delta_{N+1}^n$. Để tìm được nghiệm duy nhất của hệ phương trình, chúng ta cần bổ sung điều kiện biên từ (2).

Cụ thể, từ (2) ta có:
$$\begin{cases} u_x(a, t) = 0 \\ u_x(b, t) = 0 \end{cases}$$

thay $u(x, t)$ bởi $U_N(x, t)$ ta sẽ được:

$$\begin{cases} U_N'(a, t) = 0 \\ U_N'(b, t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_{-1}^n = \delta_1^n \\ \delta_{N+1}^n = \delta_{N-1}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9)$$

với $\delta_m^n = \delta_m(t_n), t_n = n\Delta t, m = -1, 0, \dots, N, N+1, t = 0, 1, 2, \dots$

Thay (9) vào hệ phương trình (8), khi đó hệ phương trình (8) có dạng:

$$A\delta^{n+1} = B\delta^n, \text{ với } \delta^n = (\delta_0^n, \delta_1^n, \dots, \delta_N^n). \quad (10)$$

Chúng ta nhận thấy rằng (10) là hệ phương trình tuyến tính có (N+1) phương trình với (N+1) ẩn, với A, B là các ma trận

Thay $u(x, t)$ bởi nghiệm xấp xỉ và sử dụng công thức (5) ta nhận được:

$$\begin{aligned} & \delta_{j-1}^{n+1} + 4\delta_j^{n+1} + \delta_{j+1}^{n+1} + \frac{\beta dt}{2}(-\delta_{j-1}^{n+1} + \delta_{j+1}^{n+1}) - \frac{\mu}{2h^2}[\delta_{j-2}^{n+1} + 8\delta_{j-1}^{n+1} - 18\delta_j^{n+1} + 8\delta_{j+1}^{n+1} + \delta_{j+2}^{n+1}] = \\ & = \delta_{j-1}^n + 4\delta_j^n + \delta_{j+1}^n - \frac{\beta dt}{2}(-\delta_{j-1}^n + \delta_{j+1}^n) - \frac{\mu}{2h^2}[\delta_{j-2}^n + 8\delta_{j-1}^n - 18\delta_j^n + 8\delta_{j+1}^n + \delta_{j+2}^n] \end{aligned}$$

Nếu đặt $C_1 = \frac{\mu}{2h^2}$ và $C_6 = \frac{\beta dt}{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} & -C_1\delta_{j-2}^{n+1} + (1+C_6-8C_1)\delta_{j-1}^{n+1} + (4+18C_1)\delta_j^{n+1} + (1+C_6-8C_1)\delta_{j+1}^{n+1} - C_1\delta_{j+2}^{n+1} = \\ & = -C_1\delta_{j-2}^n + (1+C_6-8C_1)\delta_{j-1}^n + (4+18C_1)\delta_j^n + (1-C_6-8C_1)\delta_{j+1}^n - C_1\delta_{j+2}^n \end{aligned}$$

Đặt $\delta_j^n = \xi^n e^{ijKh}, i^2 = -1, \varphi = Kh$, khi đó:

$$\begin{aligned} & -C_1\xi^{n+1}e^{i(j-2)\varphi} + (1+C_2-\gamma C_1)\xi^{n+1}e^{i(j-1)\varphi} + (4+18C_1)\xi^{n+1}e^{ij\varphi} + (1+C_6-8C_1)\xi^{n+1}e^{i(j+1)\varphi} - C_1\xi^{n+1}e^{i(j+2)\varphi} \\ & = -C_1\xi^n e^{i(j-2)\varphi} + (1+C_6-8C_1)\xi^n e^{i(j-1)\varphi} + (4+18C_1)\xi^n e^{ij\varphi} + (1-C_6-8C_1)\xi^n e^{i(j+1)\varphi} - C_1\xi^n e^{i(j+2)\varphi}. \end{aligned}$$

chứa ẩn δ^n . Do vậy, nếu tính được δ^0 thì dùng phép lặp ta có thể tính được $\delta^n, n = 1, 2, \dots$ δ^0 được tính từ điều kiện biên:

$$U_N(x_m, 0) = u(x_m, 0)$$

$$\text{hay } U_N(x_m, 0) = f(x_m), m = 0, \dots, N.$$

3. Sự ổn định của lược đồ sai phân

Xét phương trình (1):

$$u_t + u_x + p(p+1)u^p u_x - \mu u_{xx} = 0,$$

coi u là hằng địa phương.

Đặt $1 + p(p+1)\gamma = \beta$, sai phân hữu hạn ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{u^{n+1} - u^n}{dt} + \beta \frac{u_x^{n+1} + u_x^n}{2} - \mu \frac{u_{xx}^{n+1} - u_{xx}^n}{dt} = 0 \\ \Leftrightarrow & u^{n+1} + \frac{\beta dt}{2} u_x^{n+1} - \mu u_{xx}^{n+1} \\ & = u^n - \frac{\beta dt}{2} u_x^n - \mu u_{xx}^n. \end{aligned}$$

Chia cả hai vế cho $\xi^n e^{ij\varphi}$ ta có:

$$\begin{aligned} &\xi[-C_1(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi) + (1 - C_6 - 8C_1)(\cos \varphi - i\sin \varphi) + 4 + 18C_1 + (1 + C_2 - 8C_1)(\cos \varphi + i\sin \varphi) \\ &- C_1(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)] = -C_1(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi) + (1 + C_6 - 8C_1)(\cos \varphi - i\sin \varphi) \\ &+ 4 + 18C_1 + (1 - C_6 - 8C_1)(\cos \varphi + i\sin \varphi) - C_1(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi). \end{aligned}$$

Rút ra:

$$\xi[-2C_1 \cos 2\varphi + 2(1 - 8C_1) \cos \varphi + 4 + 18C_1 + 2C_6 i \sin \varphi] = -2C_1 \cos 2\varphi + 2(1 - 8C_1) + 4 + 18C_1 + 2C_6 i \sin \varphi.$$

Vậy: $\xi = \frac{A - Bi}{A + Bi}$,

với $A = -2C_1 \cos 2\varphi + 2(1 - 8C_1) \cos \varphi + 4 + 18C_1$

và $B = 2C_6 i \sin \varphi$.

Suy ra: $|\xi| = 1$. Do đó hệ phương trình sai phân hữu hạn của (1) ổn định vô điều kiện.

4. Một số ví dụ

Trong mục này chúng ta sẽ xây dựng một số chương trình Python tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình (1) và so sánh nó với nghiệm đúng. Các đại lượng của lực đồ sai phân về khối lượng (I_1), động lượng (I_2) và năng lượng (I_3) cũng được tính toán.

Sai số được tính theo công thức sau:

$$L_2 = \|u - U_N\|_2 \approx \sqrt{h \sum_{m=0}^N |u(x_m, t) - U_N(x_m, t)|^2}$$

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{c(p+2)}{2p} \sec h^2 \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu(c+1)}} (x - (c+1)t - x_0) \right]}$$

với c và x_0 là các hằng số.

Các đại lượng I_1, I_2, I_3 được xác định:

$$I_1 = \int_a^b U_N dx; \quad I_2 = \int_a^b [U_N^2 + \mu(U_N)_x^2] dx;$$

$$I_3 = \int_a^b [U_N^4 - \mu(U_N)_x^2] dx.$$

4.1. Chuyển động với sóng đơn

Ta chọn $\mu = 1, x_0 = 40, x \in [0, 100]$, ngoài ra các tham số $p, c, h, \Delta t$ sẽ được chọn để minh họa sai số L_2 và L_∞ và các giá trị $I_i, i = 1, 2, 3$. Ngoài ra, sai số sẽ được minh họa với các nghiên cứu gần đây.

Bảng 1. Các đại lượng I_i và sai số với

$$p = 2, c = 1, \Delta t = 0,025, h = 0,2, \mu = 1, x \in [0, 100], x_0 = 40.$$

t	0	2	4	6	8	10
I_1	4,4428829	4,4428829	4,4428829	4,4428893	4,4428893	4,4428893
I_2	3,2998222	3,2998121	3,299802	3,299792	3,299782	3,299772
I_3	1,4142230	1,4142128	1,414203	1,414193	1,414183	1,414172
$L_2 \times 10^3$	0	0,852983	1,685652	2,503370	3,318008	4,134710
$L_\infty \times 10^3$	0	0,451868	0,878969	1,295084	1,711440	2,129835

$$L_\infty = \|u - U_N\|_\infty \approx \max_m |u(x_m, t) - U_N(x_m, t)|.$$

Theo [2] nghiệm chính xác của (1) được xác định:

a) Xét $p = 2, c = 1, h = 0,2$ và $\Delta t = 0,025, t \in [0, 10]$.

Kết quả được trình bày trong Bảng 1.

Căn cứ vào bảng 1, chúng ta nhận thấy

trong quá trình tính toán L_2 và L_∞ luôn nhỏ hơn 0,005 và 0,003.

I_1 không đổi trong quá trình tính toán so với giá trị đầu thì $I_1 \times 10^6 < 0,9$.

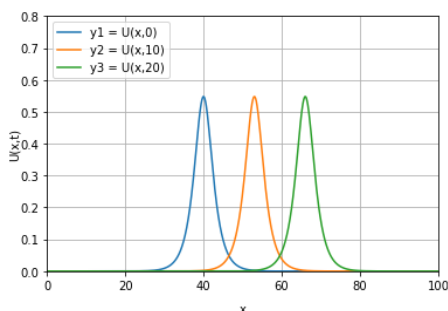
I_2 so với giá trị đầu thì $I_2 \times 10^3 < 0,2$.

I_3 so với giá trị đầu thì $I_3 \times 10^3 < 0,2$.

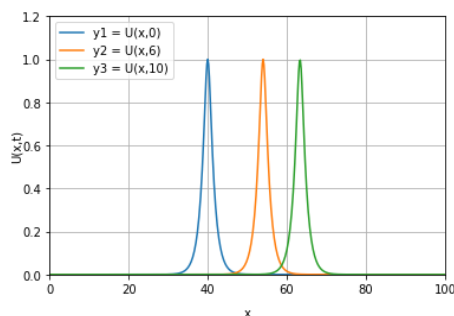
Với $p = 2$, $\Delta t = 0,01$, $h = 0,1$, $c = 0,3$, kết quả thể hiện trong Bảng 2.

Bảng 2. $p = 2$, $\Delta t = 0,01$, $h = 0,1$, $c = 0,3$ và $x \in [0,100]$.

t	0	5	10	15	20
I_1	3,5819667	3,5819667	3,5819667	3,5819667	3,5819662
I_2	1,3450765	1,3450765	1,3450764	1,3450764	1,3450764
I_3	0,1537231	0,1537231	0,1537231	0,1537230	0,1537230
$L_2 \times 10^5$	0	1,4380932	2,7768650	4,0486212	5,2892945
$L_\infty \times 10^5$	0	0,6964475	1,2755426	1,8062731	2,3324874



Hình 1. Đồ thị sóng đơn với $p = 2$, $\Delta t = 0,01$, $h = 0,1$, $c = 0,3$ và $x \in [0,100]$ tại $t = 0, 10, 20$.



Hình 2. Đồ thị sóng đơn với $p = 4$, $\Delta t = 0,01$; $h = 0,2$; $c = \frac{4}{3}$ và $x \in [0,100]$ tại $t = 0; 6; 10$.

Với $p = 4$, $\Delta t = 0,01$, $h = 0,1$, $c = \frac{4}{3}$, kết quả thể hiện trong Bảng 4.

Bảng 4. $p = 4$, $\Delta t = 0,01$, $h = 0,1$, $c = \frac{4}{3}$ và $x \in [0,100]$.

t	0	2	4	6	8	10
I_1	3,4686561	3,4686561	3,4686561	3,4686561	3,4686561	3,4686561
I_2	2,6716687	2,6716472	2,6716256	2,6716041	2,6715826	2,6715601
I_3	0,7291752	0,7291817	0,7291842	0,7291751	0,7291632	0,7291505
$L_2 \times 10^3$	0	1,160876	2,352168	3,583039	4,856776	6,173865
$L_\infty \times 10^3$	0	0,717663	1,438773	2,183653	2,966184	3,769355

Căn cứ vào Bảng 4, ta thấy L_2 và L_∞ luôn luôn nhỏ hơn $0,7 \times 10^{-3}$ và $0,4 \times 10^{-3}$. So với giá trị ban đầu thì I_1, I_2, I_3 tương ứng nhỏ hơn $0,9 \times 10^{-6}, 0,2 \times 10^{-3}$ và $0,4 \times 10^{-3}$.

Hình 2, minh họa đồ thị sóng đơn ứng với $t = 0, 6$ và 10 .

Bây giờ chúng ta so sánh các đại lượng

I_1, I_2, I_3 và sai số L_2, L_∞ với nghiệm các kết quả nghiên cứu tại $t = 10, [2, 3, 8]$.

Bảng 5 trình bày giá trị các sai số của ta, nhìn chung nhỏ hơn các giá trị sai số tương ứng khác của các kết quả nghiên cứu. Các giá trị I_i xấp xỉ với các giá trị tìm được của họ.

Bảng 5. So sánh kết quả sóng với $\mu = 1, t = 10$, và $x \in [0, 100]$, $p = 2, 3, 4$.

	Công trình	$p = 2, h = 0,2$	$p = 3, h = 0,2$	$P = 4, h = 0,1$
		$c = 1; \Delta t = 0,025$	$c = 0,3; \Delta t = 0,01$	$c = 0,3; \Delta t = 0,01$
I_1	[8]	4,442880	3,677550	3,759230
	[2]	4,442866	3,677607	3,759286
	[3]	4,442866	-	-
	Đề xuất	4,442882	3,677552	-
I_2	[8]	3,299810	1,565740	1,729990
	[2]	3,299715	1,565762	1,730026
	[3]	3,299824	-	-
	Đề xuất	3,299772	1,565741	-
I_3	[8]	1,414160	0,226837	0,289406
	[2]	1,414312	0,226845	0,289417
	[3]	1,414206	-	-
	Đề xuất	1,414172	0,226839	-
$L_2 \times 10^3$	[8]	0,003005	0,071976	0,122539
	[2]	0,002517	0,078514	0,098005
	[3]	0,009619	-	-
	Đề xuất	0,004135	0,072180	0,153295
$L_\infty \times 10^3$	[8]	0,001687	0,037723	0,066207
	[2]	0,001340	0,036501	0,048084
	[3]	0,004971	-	-
	Đề xuất	0,002130	0,034795	0,077071

4.2. Tương tác của hai sóng đơn

Để nghiên cứu sự tương tác của hai sóng đơn, chúng ta xét điều kiện đầu:

$$u(x,0) = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{c_i(p+2)}{2p}} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{p}{2} \sqrt{\frac{c_i}{\mu(c_i+1)}} (x-x_i) \right]$$

với c_i và x_i , $i=1,2$ là các hằng số.

a) Với $p=2$, $\mu=1$, $x_1=25$, $x_2=55$, $a=0$, $b=250$, $\Delta t=0,025$, $h=0,2$, $c_1=4$, $c_2=1$

Kết quả I_i với tương tác hai sóng được trình bày tại Bảng 6 như sau:

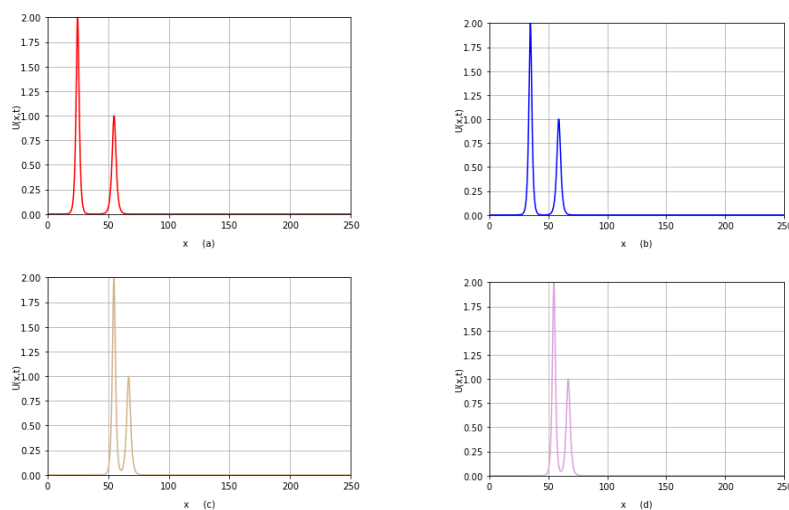
Bảng 6. Các bất biến I_i khi tương tác hai sóng đơn

với $p=2$, $\mu=1$, $x_1=25$, $x_2=55$, $a=0$, $b=250$, $\Delta t=0,025$, $h=0,2$, $c_1=4$, $c_2=1$.

	t \	0	2	4	8	12	16	18	20
I_1	[2-1]	11,4676542	11,4676542	11,4676542	11,4676542	11,4676541	11,4676541	11,4676541	11,4676541
	[2-2]	11,4676542	11,4676503	11,4676484	11,4668849	11,4676777	11,4676555	11,4676490	11,4676452
	Đề xuất	11,4676977	11,4676967	11,4676955	11,4676893	11,4676939	11,4676897	11,4676884	11,4676872
I_2	[2-1]	14,6292089	14,6292089	14,6292088	14,6292088	14,6292087	14,6292087	14,6292087	14,6292086
	[2-2]	14,6292089	14,6280240	14,6277880	14,1400014	14,6803731	14,6442435	14,62350836	14,6309639
	Đề xuất	14,6291105	14,6240854	14,6190511	14,6066367	14,6028792	14,5928649	14,5878752	14,5829019
I_3	[2-1]	22,8803575	22,8803216	22,8803204	22,8759840	22,8803706	22,8803978	22,8803925	22,8803901
	[2-2]	22,8803575	22,8815424	22,8817784	23,3695650	22,8291933	22,8653229	22,8744828	22,8786025
	Đề xuất	22,8805985	22,8605183	22,8404242	22,7876562	22,7759073	22,7362364	22,7163888	22,6966016

Từ Bảng 6, ta có nhận xét với các số liệu mục 4.2.a đã cho khi t chạy từ 0 đến 20:

I_1, I_2, I_3 tương ứng thay đổi so với giá trị ban đầu: $0,2 \times 10^{-4}$, 0,2 và 0,2. Lược đồ nghiên cứu của ta đạt kết quả cụ thể của I_i gần lược đồ nghiên cứu trong [2]. Hình 3a-3d minh họa tương tác của hai sóng đơn tại $t=0$ (a); $t=2$ (b); $t=4$ (c) và $t=6$ (d).



Hình 3. Tương tác hai sóng đơn với $p=2$; (a) $t=0$, (b) $t=2$, (c) $t=4$, (d) $t=6$.

b) Với $p = 4, \mu = 1, x_1 = 20, x_2 = 80, a = 0, b = 200, \Delta t = 0,01, h = 0,125, c_1 = \frac{64}{3}, c_2 = \frac{4}{3}$.

Bảng 7. Trình bày các bất biến I_i khi tương tác hai sóng đơn với bộ tham số b).

	t	0	10	20	3	4	5	6
I_1	[2-1]	9,6907772	9,6907774	9,6907776	9,6907778	9,6907778	9,6907780	9,6907782
	[2-2]	9,6907772	9,6894501	9,6881175	9,6850972	9,6860154	9,6847993	9,6834620
	Đề xuất	9,6907416	9,6907403	9,6907388	9,6907352	9,6907393	9,6907361	9,6907338
I_2	[2-1]	12,9443914	12,9443919	12,9443925	12,9443930	12,9443932	12,9443937	12,9443943
	[2-2]	12,9443914	12,9432906	12,9390629	12,3046064	12,9703128	13,0538036	13,0027533
	Đề xuất	12,9443499	12,9237882	12,9034543	12,8814307	12,8720860	12,8525952	12,8330680
I_3	[2-1]	17,0186758	17,0236820	17,0256746	17,9687428	16,9816963	16,9181837	16,9520240
	[2-2]	17,0186758	17,0197766	17,0240043	17,6584608	16,9927544	16,9093637	16,9603139
	Đề xuất	17,0187562	16,9409430	16,8734616	17,5957521	16,7460502	16,5919025	16,5603484

Căn cứ vào Bảng 7 ta có nhận xét: các giá trị I_1, I_2, I_3 có thể coi là đạt được kết quả tính tương ứng với [2].

5. Kết luận

Trong bài báo này, chúng ta đã sử dụng ngôn ngữ lập trình Python giải phương trình GRLW. Sai số L_2, L_∞ và các bất biến về khối lượng (I_1), động lượng (I_2) và năng lượng (I_3) được minh họa qua một số ví dụ. Lược đồ xấp xỉ đưa ra có sai số tốt hơn một số kết quả nghiên cứu gần đây. Sự thay đổi của các I_i là nhỏ và phù hợp với các tính toán của các công trình đã nghiên cứu của các tác giả khác.

Tài liệu tham khảo

[1] Aditi Singh, Sumita Dahiya, S. P. Singh (2020), *A fourth-order B-spline collocation method for nonlinear Burgers–Fisher equation*, Mathematical Sciences, 14:75 – 85.

[2] S. Battal Gazi Karakoça, Halil Zeybek (2016), *A cubic B – spline Galerkin approach for the numerical simulation of the GEW equation*, Statistics, Optimization and Information Computing, Vol. 4, pp. 30 - 41.

[3] S. Battal Gazi Karakoça, Liquan Mei, Khalid K. Ali (2021), *Two efficient methods for solving the generalized regularized long wave equation*, Applicable Analysis an International Journal, 1 - 22.

[4] L.R.T. Gardner, G.A. Gardner, F.A. Ayoub, N.K. Amein (1997), *Approximations of solitary waves of the MRLW equation by b-spline finite element*, Arab. J. Sci. Eng. 22, pp. 183–193.

[5] A.K. Khalifa, K.R. Raslan, H.M. Alzubaidi (2008), *A collocation method with cubic b-splines for solving the MRLW equation*, J. Comput. Appl. Math. 212 (2), pp. 406–418.

[6] P. M. Prenter (1975), *“Splines and Variational Methods”*, Wiley, New York.

[7] K.R. Raslan, T.S. EL-Danaf (2010), *Solitary waves solutions of the MRLW equation using quintic b-splines*, J. King Saud Univ. Sci. 22 (3), pp. 161–166.

[8] T. Roshan (2012), *A Petrov – Galerkin method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 63, pp. 943 - 956.